

1918

VI VII VIII

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse am 7. Februar. (S. 139)

Sitzung der philosophisch-historischen Klasse am 7. Februar. (S. 141)

J. KIRCHNER: Archon Euthios. (S. 142)

Gesamtsitzung am 14. Februar. (S. 153)

EINSTEIN: Über Gravitationswellen. (Mitteilung vom 31. Januar.) (S. 154)

E. FREUNDLICH: Über die singulären Stellen der Lösungen des n -Körper-Problems. 1. Mitteilung.
(Mitteilung vom 31. Januar.) (S. 168)

BERLIN 1918

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI GEORG REIMER

Über Gravitationswellen.

Von A. EINSTEIN.

(Vorgelegt am 31. Januar 1918 [s. oben S. 79].)

Die wichtige Frage, wie die Ausbreitung der Gravitationsfelder erfolgt, ist schon vor anderthalb Jahren in einer Akademiearbeit von mir behandelt worden¹. Da aber meine damalige Darstellung des Gegenstandes nicht genügend durchsichtig und außerdem durch einen bedauerlichen Rechenfehler verunstaltet ist, muß ich hier nochmals auf die Angelegenheit zurückkommen.

Wie damals beschränke ich mich auch hier auf den Fall, daß das betrachtete zeiträumliche Kontinuum sich von einem »galileischen« nur sehr wenig unterscheidet. Um für alle Indizes

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (1)$$

setzen zu können, wählen wir, wie es in der speziellen Relativitätstheorie üblich ist, die Zeitvariable x_4 rein imaginär, indem wir

$$x_4 = it$$

setzen, wobei t die »Lichtzeit« bedeutet. In (1) ist $\delta_{\mu\nu} = 1$ bzw. $\delta_{\mu\nu} = 0$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Die $\gamma_{\mu\nu}$ sind gegen 1 kleine Größen, welche die Abweichung des Kontinuums vom feldfreien darstellen; sie bilden einen Tensor vom zweiten Range gegenüber LORENTZ-Transformationen.

§ 1. Lösung der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes durch retardierte Potentiale.

Wir gehen aus von den für ein beliebiges Koordinatensystem gültigen² Feldgleichungen

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} - \sum_{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \beta \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

$$= -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

¹ Diese Sitzungsber. 1916, S. 688 ff.

² Von der Einführung des » λ -Gliedes« (vgl. diese Sitzungsber. 1917, S. 142) ist dabei Abstand genommen.

$T_{\mu\nu}$ ist der Energietensor der Materie, T der zugehörige Skalar $\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$.

Bezeichnet man als kleine Größen n ter Ordnung solche, welche in den $\gamma_{\mu\nu}$ vom n ten Grade sind, so erhält man, indem man sich bei der Berechnung beider Seiten der Gleichung (2) auf die Glieder der niedrigsten Ordnung beschränkt, das System von Näherungsgleichungen

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\alpha}} \right) = 2 \times \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha} \right). \quad (2a)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $-\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}$ und Summation über μ und ν erhält man nun zunächst (bei geänderter Bezeichnung der Indizes) die skalare Gleichung

$$\sum_{\alpha\beta} \left(-\frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\beta}^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right) = \kappa \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}.$$

Addiert man die mit $\delta_{\mu\nu}$ multiplizierte Gleichung zu Gleichung (2a), so hebt sich zunächst das zweite Glied der rechten Seite der letzteren Gleichung weg. Die linke Seite läßt sich übersichtlich schreiben, wenn man statt $\gamma_{\mu\nu}$ die Funktionen

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} \quad (3)$$

einführt. Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\mu}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\alpha}} + \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = 2 \times T_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Diese Gleichungen aber kann man dadurch bedeutend vereinfachen, daß man von den $\gamma'_{\mu\nu}$ verlangt, daß sie außer den Gleichungen (4) den Relationen

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad (5)$$

genügen sollen.

Es erscheint zunächst sonderbar, daß man den 10 Gleichungen (4) für die 10 Funktionen $\gamma'_{\mu\nu}$ willkürlich noch 4 weitere soll an die Seite stellen können, ohne daß eine Überbestimmung einträte. Die Berechtigung dieses Vorgehens erhellt aber aus folgendem. Die Gleichungen (2) sind bezüglich beliebiger Substitutionen kovariant, d. h. sie sind erfüllt für beliebige Wahl des Koordinatensystems. Führe ich ein neues Koordinatensystem ein, so hängen die $g_{\mu\nu}$ des neuen Systems von den 4 willkürlichen Funktionen ab, welche die Transformation der Koordinaten definieren. Diese 4 Funktionen können nun

so gewählt werden, daß die $g_{\mu\nu}$ des neuen Systems vier willkürlich vorgeschriebenen Beziehungen genügen. Diese denken wir so gewählt, daß sie im Falle der uns interessierenden Näherung in die Gleichungen (5) übergehen. Die letzteren Gleichungen bedeuten also eine von uns gewählte Vorschrift, nach welcher das Koordinatensystem zu wählen ist. Vermöge (5) erhält man an Stelle von (4) die einfachen Gleichungen

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}^2} = 2 \kappa T_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Aus (6) erkennt man, daß sich die Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die $\gamma_{\mu\nu}$ lassen sich bei gegebenen $T_{\mu\nu}$ aus letzteren nach Art der retardierten Potentiale berechnen. Sind x, y, z, t die reellen Koordinaten $x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{i}$ des Aufpunktes, für welchen die $\gamma'_{\mu\nu}$ berechnet werden sollen, x_0, y_0, z_0 die räumlichen Koordinaten eines Raumelementes dV_0 , r der räumliche Abstand zwischen letzterem und dem Aufpunkt, so hat man

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0. \quad (7)$$

§ 2. Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Ich habe früher¹ die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes für den Fall explizite angegeben, daß die Koordinatenwahl gemäß der Bedingung

$$g = |g_{\mu\nu}| = 1$$

erfolgt, welche Bedingung im Falle der hier behandelten Näherung

$$\gamma = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} = 0$$

lauten würde. Dieselbe ist aber bei unserer jetzigen Koordinatenwahl im allgemeinen nicht erfüllt. Es ist deswegen am einfachsten, die Energiekomponenten hier durch eine gesonderte Überlegung zu ermitteln.

Dabei ist jedoch folgende Schwierigkeit zu beachten. Unsere Feldgleichungen (6) sind nur in der ersten Größenordnung richtig, während die Energiegleichungen — wie leicht zu schließen ist — klein von der zweiten Größenordnung sind. Wir gelangen jedoch bequem durch folgende Überlegung zum Ziel. Die Energiekomponenten $\mathfrak{E}_{\mu}^{\sigma}$ (der Materie) und t_{μ}^{σ} (des Gravitationsfeldes) erfüllen gemäß der allgemeinen Theorie die Relationen

¹ Ann. d. Phys. 49. 1916. Gleichung (50).

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{F}_{\sigma}^{\tau}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\xi\tau} \frac{\partial g^{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{F}_{\xi\tau} = 0$$

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial (\mathfrak{F}_{\sigma}^{\tau} + t_{\sigma}^{\tau})}{\partial x_{\sigma}} = 0.$$

Aus diesen folgt

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial t_{\sigma}^{\tau}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{1}{2} \sum_{\xi\tau} \frac{\partial g^{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{F}_{\xi\tau}.$$

Bringen wir die rechte Seite, indem wir $\mathfrak{F}_{\xi\tau}$ aus den Feldgleichungen entnehmen, in die Form der linken Seite, so werden wir die t_{σ}^{τ} erfahren. Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind im Falle der von uns betrachteten Näherung beide Faktoren kleine Größen von der ersten Ordnung. Um also die t_{σ}^{τ} in Größen der zweiten Ordnung genau zu erhalten, braucht man beide Faktoren rechts nur in Größen erster Ordnung genau einzusetzen. Man darf also

$$\frac{\partial g^{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}} \text{ durch } -\frac{\partial \gamma_{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}}$$

und $\mathfrak{F}_{\xi\tau}$ durch $T_{\xi\tau}$

ersetzen. Statt t_{σ}^{τ} führen wir ferner die zu den $T_{\xi\tau}$ bezüglich des Charakters der Indizes analogen Größen $t_{\xi\tau}$ ein, welche sich dem Werte nach bei dem hier erstrebten Grade der Annäherung von den t_{σ}^{τ} nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Wir haben dann die $t_{\mu\sigma}$ gemäß der Gleichung

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{1}{2} \sum_{\xi\tau} \frac{\partial \gamma_{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}} T_{\xi\tau} \quad (8)$$

zu bestimmen. Die rechte Seite formen wir um, indem wir beachten, daß wegen (3)

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma' \quad (3a)$$

zu setzen ist, und indem wir $T_{\xi\tau}$ vermöge (6) durch die $\gamma'_{\xi\tau}$ ausdrücken. Es ergibt sich nach einfacher Umformung¹:

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = \sum_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left[\frac{1}{4 \times} \left(\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_{\sigma}} \right) - \frac{1}{8 \times} \delta_{\mu\sigma} \left(\sum_{\alpha\beta\lambda} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\lambda}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_{\lambda}} \right)^2 \right) \right].$$

¹ Der eingangs erwähnte Fehler in meiner früheren Abhandlung besteht darin, daß ich auf der rechten Seite von (8) $\frac{\partial \gamma'_{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}}$ statt $\frac{\partial \gamma_{\xi\tau}}{\partial x_{\mu}}$ eingesetzt hatte. Dieser Fehler macht auch eine Neubearbeitung von § 2 und § 3 jener Arbeit nötig.

Hieraus folgt, daß wir dem Energiesatz gerecht werden, indem wir setzen

$$4 \kappa t_{\mu\sigma} = \left(\sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_\sigma} \right) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\sigma} \left(\sum_{\alpha\beta\lambda} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\lambda} \right)^2 \right). \quad (9)$$

Die physikalische Bedeutung der $t_{\mu\sigma}$ macht man sich am leichtesten durch folgende Überlegung klar. Die $t_{\mu\sigma}$ sind für das Gravitationsfeld, was die $T_{\mu\sigma}$ für die Materie sind. Für inkohärente ponderable Materie ist aber bei Beschränkung auf Größen erster Ordnung:

$$T_{\mu\sigma} = T^{\mu\sigma} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\sigma}{ds} \left(ds^2 = - \sum_{\nu} dx_\nu^2 \right). \quad (10)$$

ρ ist dabei der Dichteskalär der Materie. Die $T_{11}, T_{22}, \dots, T_{33}$ entsprechen also Druckkomponenten; T_{14}, T_{24}, T_{34} bzw. T_{41}, T_{42}, T_{43} ist der mit $\sqrt{-1}$ multiplizierte Vektor der Impulsdichte oder Dichte des Energiestromes, T_{44} die negativ genommene Energiedichte. Analog ist die Deutung der auf das Gravitationsfeld sich beziehenden $t_{\mu\sigma}$.

Als Beispiel sei zunächst das Feld der ruhenden, punktförmigen Masse M behandelt. Aus (7) und (10) folgt sogleich

$$\gamma'_{44} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{M}{r}, \quad (11)$$

während alle andern $\gamma'_{\mu\nu}$ verschwinden. Für die $g_{\mu\nu}$ erhält man nach (11), (3a) und (1) die zuerst von DE SITTER angegebenen Werte

$$\left. \begin{array}{cccc} -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} \end{array} \right\} \quad (11a)$$

Die Lichtgeschwindigkeit c , welche allgemein durch die Gleichung

$$0 = ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

gegeben ist, ergibt sich hier aus der Relation

$$\left(1 + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \left(1 - \frac{\kappa}{4\pi} \frac{M}{r} \right) dt^2 = 0.$$

Es ist also die Lichtgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = 1 - \frac{\kappa M}{4\pi r} \quad (12)$$

bei der von uns bevorzugten Wahl der Koordinaten zwar vom Orte, nicht aber von der Richtung abhängig. Auch folgt aus (11a), daß kleine starre Körper bei Ortsänderung sich ähnlich bleiben, wobei deren in Koordinaten gemessene Linearausdehnung sich wie $\left(1 - \frac{\kappa M}{8\pi r}\right)$ ändert.

Gleichung (9) ergibt für die $t_{\alpha\tau}$ in unserem Falle

$$\left. \begin{aligned} t_{\alpha\tau} &= \frac{\kappa M^2}{32\pi^2} \left(\frac{x_\alpha x_\tau}{r^6} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\tau} \frac{1}{r^4} \right) \quad (\text{für die Indizes } 1-3) \\ t_{11} &= t_{22} = t_{33} = 0 \\ t_{44} &= -\frac{\kappa M^2}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Werte für die $t_{\alpha\tau}$ hängen durchaus von der Koordinatenwahl ab; worauf mich Hr. G. NORDSTRÖM schon vor längerer Zeit brieflich aufmerksam machte¹. Bei Koordinatenwahl gemäß der Bedingung $|g| = 1$, bei welcher ich für die $g_{\alpha\tau}$ für den Fall des Massenpunktes früher die Ausdrücke

$$\begin{aligned} g_{\alpha\tau} &= -\delta_{\alpha\tau} - \frac{\kappa M}{4\pi} \frac{x_\alpha x_\tau}{r^3} \quad (\text{Indizes } 1-3) \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = 0 \\ g_{44} &= 1 - \frac{\kappa M}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

angegeben habe, verschwinden alle Energiekomponenten des Gravitationsfeldes, wenn man sie mittels der Formel

$$\kappa t_\tau^\alpha = \frac{1}{2} \delta_\tau^\alpha \sum_{\mu, \nu, \zeta} g^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu, \lambda \\ \zeta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu, \zeta \\ \lambda \end{Bmatrix} - \sum_{\mu, \nu} g^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \mu, \lambda \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu, \sigma \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

bis zu der zweiten Größenordnung genau ausrechnet.

Man könnte vermuten, daß es durch passende Wahl des Bezugssystems vielleicht stets erzielbar sei, die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes alle zum Verschwinden zu bringen, was höchst bemerkenswert wäre. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß dies im allgemeinen nicht zutrifft.

§ 3. Die ebene Gravitationswelle.

Um die ebenen Gravitationswellen aufzufinden, machen wir den die Feldgleichungen (6) befriedigenden Ansatz

$$\gamma'_{\alpha\tau} = \alpha_{\alpha\tau} f(x_1 + ix_4). \quad (14)$$

¹ Vgl. auch E. SCHRÖDINGER, Phys. Zeitschr. 1918. 1. S. 4.

Hierbei bedeuten das $\alpha_{\mu\nu}$ reelle Konstanten, f , eine reelle Funktion von $(x_1 + ix_4)$. Die Gleichungen (5) liefern die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} + i\alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{21} + i\alpha_{24} &= 0 \\ \alpha_{31} + i\alpha_{34} &= 0 \\ \alpha_{41} + i\alpha_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Sind die Bedingungen (15) erfüllt, so stellt (14) eine mögliche Gravitationswelle dar. Um deren physikalische Natur genauer zu durchschauen, berechnen wir deren Dichte des Energiestromes $\frac{t_{41}}{i}$. Durch Einsetzen der in (15) gegebenen $\gamma_{\mu\nu}$ in Gleichung (9) erhält man

$$\frac{t_{41}}{i} = \frac{1}{4\kappa} f'^2 \left[\left(\frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2} \right)^2 + \alpha_{23}^2 \right]. \quad (16)$$

Das Merkwürdige an diesem Resultat ist, daß von den sechs willkürlichen Konstanten, welche (bei Berücksichtigung von (15)) in (14) auftreten, in (16) nur zwei auftreten. Eine Welle, für welche $\alpha_{22} - \alpha_{33}$ und α_{23} verschwinden, transportiert keine Energie. Dieser Umstand läßt sich darauf zurückführen, daß eine derartige Welle in gewissem Sinne gar keine reale Existenz hat, wie am einfachsten aus folgender Betrachtung hervorgeht.

Zunächst bemerken wir, daß mit Rücksicht auf (15) das Koeffizientenschema der $\alpha_{\mu\nu}$ der energiefreien Welle folgendes ist:

$$(\alpha_{\mu\nu} =) \left. \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & i\alpha \\ \beta & \delta & 0 & i\beta \\ \gamma & 0 & \delta & i\gamma \\ i\alpha & i\beta & i\gamma & -\alpha \end{array} \right\} \quad (17)$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier voneinander unabhängig wählbare Zahlen bedeuten.

Es sei nun ein feldfreier Raum betrachtet, dessen Linienelement ds in bezug auf geeignet gewählte Koordinaten (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) sich in der Form

$$-ds^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2 \quad (18)$$

ausdrücken läßt. Wir führen nun neue Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ein auf Grund der Substitution

$$x'_i = x_i - \lambda_i \phi(x_1 + ix_4). \quad (19)$$

Die λ_i bedeuten vier reelle, unendlich kleine Konstanten, ϕ eine reelle Funktion des Argumentes $(x_1 + ix_4)$. Aus (18) und (19) folgt, wenn man Größen zweiten Grades bezüglich der λ vernachlässigt,

$$ds^2 = - \sum_{\nu} dx_{\nu}'^2 = - \sum_{\nu} dx_{\nu}^2 + 2\phi'(dx_1 + idx_4) \sum_{\nu} \lambda_{\nu} dx_{\nu}.$$

Hieraus ergeben sich für die zugehörigen γ_{uv} die Werte

$$\left(\frac{1}{\phi'} \gamma_{uv} = \right) \begin{array}{cccc} 2\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & i\lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & i\lambda_3 \\ i\lambda_1 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & 2i\lambda_4 \end{array}$$

und hieraus für die γ'_{uv}

$$\left(\frac{1}{\phi'} \gamma'_{uv} = \right) \left. \begin{array}{cccc} \lambda_1 - i\lambda_4 & \lambda_2 & \lambda_3 & i\lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & 0 & i\lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 - i\lambda_4 & i\lambda_3 \\ i\lambda_2 + \lambda_4 & i\lambda_2 & i\lambda_3 & -\lambda_1 + i\lambda_4 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Setzen wir noch fest, daß die Funktion ϕ in (19) mit der Funktion f in (14) durch die Beziehung

$$\phi' = f \quad (21)$$

verknüpft sei, so zeigt sich, daß abgesehen von der Bezeichnung der Konstanten die γ'_{uv} gemäß (20) mit den γ_{uv} gemäß (14) und (17) vollkommen übereinstimmen.

Diejenigen Gravitationswellen, welche keine Energie transportieren, lassen sich also aus einem feldfreien System durch bloße Koordinatentransformation erzeugen; ihre Existenz ist (in diesem Sinne) nur eine scheinbare. Im eigentlichen Sinne real sind daher nur solche längs der x -Achse sich fortpflanzende Wellen, welche einer Ausbreitung der Größen $\frac{\gamma'_{22} - \gamma'_{33}}{2}$ und γ'_{23} (bzw. der Größen $\frac{\gamma_{22} - \gamma_{33}}{2}$ und γ_{23}) entsprechen.

Diese beiden Typen unterscheiden sich nicht dem Wesen, sondern nur der Orientierung nach voneinander. Das Wellenfeld ist winkeldeformierend in der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene. Dichte des Energiestromes, des Impulses und der Energie sind durch (16) gegeben.

§ 4. Die Emission von Gravitationswellen durch mechanische Systeme.

Wir betrachten ein isoliertes mechanisches System, dessen Schwerpunkt dauernd mit dem Koordinatenursprung zusammenfalle. Die in demselben vor sich gehenden Veränderungen seien so langsam und dessen räumliche Ausdehnung sei so gering, daß die dem Abstand irgend zweier materieller Punkte des Systems entsprechende Lichtzeit als unendlich kurz betrachtet werden kann. Wir fragen nach den in Richtung der positiven x -Achse von dem System gesandten Gravitationswellen.

Die letztgenannte Beschränkung bringt es mit sich, daß wir für genügend großen Abstand R eines Aufpunktes vom Koordinatenursprung an die Stelle von (7) die Gleichung

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi R} \int T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-R) dV_0. \quad (7a)$$

setzen dürfen. Wir können uns auf die Betrachtung Energie transportierender Wellen beschränken; dann haben wir nach den Ergebnissen des § 3 nur die Komponenten γ'_{23} und $\frac{1}{2}(\gamma'_{22} - \gamma'_{33})$ zu bilden. Die auf der rechten Seite von (7a) auftretenden Raumintegrale lassen sich in einer von M. LAUE erdachten Weise umformen. Wir wollen hier nur die Berechnung des Integrals

$$\int T_{23} dV_0$$

ausführlich angeben. Multipliziert man die beiden Impulsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} &= \sigma, \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{34}}{\partial x_4} &= \sigma \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{2}x_3$ bzw. $\frac{1}{2}x_2$, integriert beide über das ganze materielle System und addiert sie dann, so erhält man nach einfacher Umformung durch partielle Integration

$$-\int T_{23} dV_0 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx_4} \left\{ \int (x_3 T_{24} + x_2 T_{34}) dV_0 \right\} = 0.$$

Das letztere Integral formen wir wieder mittels der Energiegleichung

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0$$

um, indem wir diese mit $\frac{1}{2}x_2 x_3$ multiplizieren, abermals integrieren und durch partielle Integration umformen. Wir erhalten

$$-\frac{1}{2} \int (x_3 T_{42} + x_2 T_{43}) dV_0 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx_4} \left\{ \int x_2 x_3 T_{44} dV_0 \right\} = 0.$$

Setzt man dies in obige Gleichung ein, so erhält man

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_4^2} \left\{ \int x_2 x_3 T_{44} dV_0 \right\},$$

oder da $\frac{d^2}{dx_i^2}$ durch $-\frac{d^2}{dt^2}$, T_{44} durch die negative Dichte ($-\rho$) der Materie zu ersetzen ist:

$$\int T_{23} dV_0 = \frac{1}{2} \ddot{\mathfrak{J}}_{23}. \quad (22)$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\mathfrak{J}_{\alpha\gamma} = \int x_\alpha x_\gamma \rho dV_0 \quad (23)$$

gesetzt; $\mathfrak{J}_{\alpha\gamma}$ sind die Komponenten des (zeitlich variablen) Trägheitsmomentes des materiellen Systems.

Auf analogem Wege erhält man

$$\int (T_{22} - T_{33}) dV_0 = \frac{1}{2} (\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}). \quad (24)$$

Aus (7a) ergibt sich auf Grund von (22) und (24)

$$\gamma'_{23} = -\frac{\kappa}{4\pi R} \ddot{\mathfrak{J}}_{23}. \quad (25)$$

$$\frac{\gamma'_{22} - \gamma'_{33}}{2} = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left(\frac{\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2} \right). \quad (26)$$

Die $\mathfrak{J}_{\alpha\gamma}$ sind nach (7a), (22), (24) für die Zeit $t-R$ zu nehmen, also Funktionen von $t-R$, oder bei großem R in der Nähe der x -Achse auch Funktionen von $t-x$. (25), (26) stellen also Gravitationswellen dar, deren Energiefluß längs der x -Achse gemäß (16) die Dichte

$$\frac{t_{43}}{i} = \frac{\kappa}{64\pi^2 R^2} \left[\left(\frac{\ddot{\mathfrak{J}}_{22} - \ddot{\mathfrak{J}}_{33}}{2} \right)^2 + \ddot{\mathfrak{J}}_{23}^2 \right] \quad (27)$$

besitzt.

Wir stellen uns noch die Aufgabe, die gesamte Ausstrahlung des Systems durch Gravitationswellen zu berechnen. Um diese Aufgabe zu lösen, fragen wir zunächst nach der Energiestrahlung des betrachteten mechanischen Systems nach der durch die Richtungskosinus α_i definierten Richtung. Diese kann man durch Transformation oder kürzer durch Zurückführung auf folgende formale Aufgabe lösen.

Es sei $A_{\alpha\beta}$ ein symmetrischer Tensor (in drei Dimensionen), α_i ein Vektor. Man sucht einen Skalar S , der Funktion der $A_{\alpha\beta}$ und α_i ist und in den $A_{\alpha\beta}$ ganz und homogen vom zweiten Grade, welcher Skalar für $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ in

$$\left(\frac{A_{22} - A_{33}}{2} \right)^2 + A_{23}^2$$

übergeht. — Der gesuchte Skalar wird eine Funktion der Skalare $\sum_{\mu} A_{\mu\mu}$, $\sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2$, $\sum_{\mu\nu} \dot{A}_{\mu\nu} \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}$, $\sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma} A_{\mu\tau} \alpha_{\sigma} \alpha_{\tau}$ sein. Mit Rücksicht darauf, daß die beiden letzten Skalare für $\alpha_r = (1, 0, 0)$ in A_{11} bzw. $\sum_{\mu} A_{\mu\mu}^2$ übergehen, findet man nach einiger Überlegung, daß der gesuchte Skalar ist:

$$S = -\frac{1}{4} \left(\sum_{\mu} A_{\mu\mu} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu} A_{\mu\mu} \sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} \alpha_{\rho} \alpha_{\sigma} + \frac{1}{4} \left(\sum_{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} \alpha_{\rho} \alpha_{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^2 - \sum_{\mu\sigma\tau} A_{\mu\sigma} A_{\mu\tau} \alpha_{\sigma} \alpha_{\tau}. \quad (28)$$

Es ist klar, daß S die Dichte der in der Richtung $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ von dem mechanischen System radial nach außen fließenden Gravitationsstrahlung ist, wenn

$$A_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{\kappa}}{8\pi R} \ddot{J}_{\mu\nu} \quad (29)$$

gesetzt wird.

Mittelt man S bei Festhaltung der $A_{\mu\nu}$ über alle Richtungen des Raumes, so erhält man die mittlere Dichte \bar{S} der Ausstrahlung. Das mit $4\pi R^2$ multiplizierte \bar{S} endlich ist der Energieverlust pro Zeiteinheit des mechanischen Systems durch Gravitationswellen. Die Rechnung ergibt

$$4\pi R^2 \bar{S} = \frac{\kappa}{80\pi} \left[\sum_{\mu\nu} \ddot{J}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} \left(\sum_{\mu} \ddot{J}_{\mu\mu} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Man sieht an diesem Ergebnis, daß ein mechanisches System, welches dauernd Kugelsymmetrie behält, nicht strahlen kann, im Gegensatz zu dem durch einen Rechenfehler entstellten Ergebnis der früheren Abhandlung.

Aus (27) ist ersichtlich, daß die Ausstrahlung in keiner Richtung negativ werden kann, also sicher auch nicht die totale Ausstrahlung. Bereits in der früheren Abhandlung ist betont geworden, daß das Endergebnis dieser Betrachtung, welches einen Energieverlust der Körper infolge der thermischen Agitation verlangen würde, Zweifel an der allgemeinen Gültigkeit der Theorie hervorrufen muß. Es scheint, daß eine vervollkommnete Quantentheorie eine Modifikation auch der Gravitationstheorie wird bringen müssen.

§ 5. Einwirkung von Gravitationswellen auf mechanische Systeme.

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch kurz überlegen, inwiefern Energie von Gravitationswellen auf mechanische Systeme übergehen kann. Es liege wieder ein mechanisches System vor von der

im § 4 untersuchten Art. Dasselbe unterliege der Einwirkung einer Gravitationswelle von — gegen die Ausdehnung des Systems — großer Wellenlänge. Um die Energieaufnahme des Systems kennen zu lernen, knüpfen wir an die Impuls-Energie-Gleichung der Materie an

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{I}_{\sigma}^{\tau}}{\partial x_{\sigma}^{\tau}} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma\tau} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_{\mu}} \mathfrak{I}_{\sigma\tau} = 0.$$

Diese integrieren wir bei konstantem x_4 über das ganze System und erhalten für $\mu = 4$ (Energiesatz)

$$\frac{d}{dx_4} \left\{ \int \mathfrak{I}_4^4 dV \right\} = - \frac{1}{2} \int dV \sum_{\sigma\tau} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_4} \mathfrak{I}_{\sigma\tau}.$$

Das Integral der linken Seite ist die Energie E des ganzen materiellen Systems. Links steht also die zeitliche Zunahme dieser Energie. Führt man die Differentiationen nach der reellen Zeit aus und beschränkt sich rechter Hand auf die Beibehaltung der Glieder zweiter Größenordnung, so erhält man

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int dV \sum_{\sigma\tau} \left(\frac{\partial \gamma_{\sigma\tau}}{\partial t} T_{\sigma\tau} \right). \quad (31)$$

Nun können wir die das Gravitationsfeld darstellenden $\gamma_{\sigma\tau}$ in einen der einfallenden Welle entsprechenden Anteil $(\gamma_{\sigma\tau})_w$ und in einen Bestandteil $(\gamma_{\sigma\tau})_r$ spalten, gemäß der Gleichung

$$\gamma_{\sigma\tau} = (\gamma_{\sigma\tau})_w + (\gamma_{\sigma\tau})_r. \quad (32)$$

Demgemäß spaltet sich das Integral der rechten Seite von (31) in eine Summe von zwei Integralen, von denen das erste den Energiezuwachs ausdrückt, der aus der Welle stammt. Dieser interessiert uns hier allein; wir wollen daher, um die Schreibweise nicht zu komplizieren, (31) dahin interpretieren, daß $\frac{dE}{dt}$ den aus der Welle allein stammenden Energiezuwachs und $\gamma_{\sigma\tau}$ den oben mit $(\gamma_{\sigma\tau})_w$ bezeichneten Anteil bedeuten soll. Dann ist $\gamma_{\sigma\tau}$ eine örtlich langsam veränderliche Funktion, so daß wir setzen dürfen

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\tau} \frac{\partial \gamma_{\sigma\tau}}{\partial t} \cdot \int T_{\sigma\tau} dV. \quad (33)$$

Es sei die wirkende Welle eine Energie transportierende, in welcher nur die Komponente γ_{23} ($= \gamma_{32}$) des Gravitationsfeldes von Null verschieden sei. Dann ist wegen (22)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial t} \frac{d^2 \mathfrak{I}_{23}}{dt^2}. \quad (34)$$

Bei gegebener Welle und gegebenem mechanischen Vorgang ist hiernach die der Welle entzogene Energie durch Integration ermittelbar.

§ 6. Antwort auf einen von Hrn. LEVI-CIVITA herrührenden Einwand.

In einer Serie interessanter Untersuchungen hat Hr. LEVI-CIVITA in letzter Zeit zur Klärung von Problemen der allgemeinen Relativitätstheorie beigetragen. In einer dieser Arbeiten¹ stellt er sich bezüglich der Erhaltungssätze auf einen von dem meinigen abweichenden Standpunkt und bestreitet auf Grund dieser seiner Auffassung die Berechtigung meiner Schlüsse in bezug auf die Ausstrahlung der Energie durch Gravitationswellen. Wenn wir auch unterdessen durch Briefwechsel die Frage in einer für uns beide genügenden Weise geklärt haben, halte ich es doch im Interesse der Sache für gut, einige allgemeine Bemerkungen über die Erhaltungssätze hier anzufügen.

Es ist allgemein zugegeben, daß gemäß den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie eine bei beliebiger Wahl des Bezugssystems gültige Vierergleichung von der Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{E}_{\nu} + t_{\nu})}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad (35)$$

existiert, wobei die \mathfrak{E}_{ν} die Energiekomponenten der Materie, die t_{ν} Funktionen der $g_{\mu\nu}$ und ihrer ersten Ableitungen sind. Aber es bestehen Meinungsverschiedenheiten darüber, ob man die t_{ν} als die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes aufzufassen hat. Diese Meinungsverschiedenheit halte ich für unerheblich, für eine bloße Wortfrage. Ich behaupte aber, daß die angegebene, nicht bestrittene Gleichung diejenigen Erleichterungen der Übersicht mit sich bringt, welche den Wert der Erhaltungssätze ausmachen. Dies sei an der vierten Gleichung ($\nu = 4$) erläutert, welche ich als Energiegleichung zu bezeichnen pflege.

Es liege ein räumlich begrenztes materielles System vor, außerhalb dessen materielle Dichten und elektromagnetische Feldstärken verschwinden. Wir denken uns eine ruhende Fläche S , welche das ganze materielle System umschließt. Dann erhält man durch Integration der vierten Gleichung über den von S umschlossenen Raum:

$$-\frac{d}{dx_4} \left\{ \int (\mathfrak{E}_4 + t_4) dV \right\} = \int_S (t_4^1 \cos(n x_1) + t_4^2 \cos(n x_2) + t_4^3 \cos(n x_3)) d\sigma \quad (36)$$

Niemand kann durch irgendwelche Gründe gezwungen werden, t_4 als Energiedichte des Gravitationsfeldes und (t_4^1, t_4^2, t_4^3) als Komponenten des

¹ Accademia dei Lincei, Vol. XXVI, Seduta des 1.º aprile 1917.

Gravitations-Energieflusses zu bezeichnen. Aber man kann folgendes behaupten: Wenn das Raumintegral von t_i^i klein ist gegenüber demjenigen von der »materiellen« Energiedichte \mathfrak{E}_i^i , stellt die rechte Seite sicherlich den Verlust an materieller Energie des Systems dar. Dies allein ist es, was in der vorstehenden und in meiner früheren Abhandlung über Gravitationswellen benutzt ist.

Hr. LEVI-CIVITA (und vor ihm mit weniger Nachdruck schon H. A. LORENTZ) hat eine von (35) abweichende Formulierung der Erhaltungssätze vorgeschlagen. Er (und mit ihm auch andere Fachgenossen) ist gegen eine Betonung der Gleichungen (35) und gegen die obige Interpretation, weil die t_i^i keinen Tensor bilden. Letzteres ist zuzugeben; aber ich sehe nicht ein, warum nur solchen Größen eine physikalische Bedeutung zugeschrieben werden soll, welche die Transformationseigenschaften von Tensorcomponenten haben. Nötig ist nur, daß die Gleichungssysteme für jede Wahl des Bezugssystems gelten, was für das Gleichungssystem (35) zutrifft. LEVI-CIVITA schlägt folgende Formulierung des Energie-Impuls-Satzes vor. Er schreibt die Feldgleichungen der Gravitation in der Form

$$T_{im} + A_{im} = 0, \quad (37)$$

wobei T_{im} der Energietensor der Materie und A_{im} ein kovarianter Tensor ist, der von den g_{uv} und ihren beiden ersten Ableitungen nach den Koordinaten abhängt. Die A_{im} werden als die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes bezeichnet.

Ein logischer Einwand gegen eine derartige Benennung kann natürlich nicht erhoben werden. Aber ich finde, daß aus Gleichung (37) nicht derartige Folgerungen gezogen werden können, wie wir sie aus den Erhaltungssätzen zu ziehen gewohnt sind. Es hängt dies damit zusammen, daß nach (37) die Gesamtenergiekomponenten überall verschwinden. Die Gleichungen (37) schließen es beispielsweise (im Gegensatz zu den Gleichungen (35)) nicht aus, daß ein materielles System sich vollständig in das Nichts auflöse, ohne eine Spur zu hinterlassen. Denn seine Gesamtenergie ist nach (37) (nicht aber nach (35)) von Anfang an gleich null; die Erhaltung dieses Energiewertes verlangt nicht die Fortexistenz des Systems in irgendeiner Form.